ヒルベルト空間の中の4個の部分空間の配置問題(II) (作用素の構造と関連する最近の話題)

綿谷, 安男; 榎本, 雅俊

数理解析研究所講究録 1312 巻 2003 年 1-14

ヒルベルト空間の中の4個の部分空間の配置問題 II

九州大学大学院
数理学研究院 綿谷安男 (Yasuo Watatani)

甲子園大学
経営情報学部 榎本雅俊 (Masatoshi Enomoto)

$\boxed{1}$ 序. Gelfand-Ponomarev (1970) により, 有限次元 Hilbert 空間上の既約な ($n \leq 4$) 個の部分空間の順序付けられた組が, similar 性を除いて, 完全に分類されている. 我々は, 彼らの結果を無限次元に拡張することを目標としている. さて, Gelfand-Ponomarev は, 何故このようなことを行なったのであろうか.

さて, 線形代数では, 一つの目指すべきこととして, 作用素を similar 性を除いて, 分類をするということがある. このことの結果として, 作用素の Jordan 標準形を求めることがある.

一方，Hilbert空間 K 上の作用素には，$H=K\oplus K$ の subspaces $E_1=K\oplus(0)$, $E_2=(0)\oplus K$, $E_3=\mathrm{graph}\,T=\{(x\oplus Tx)\mid x\in K\}$, $E_4=\{x\oplus x\mid x\in K\}$ の順序付けられたsystem $\mathcal{S}_T=(H;E_1,\cdots,E_4)$ が標準的に対応する。

また，2つの systems $\mathcal{S}=(H;E_1,\cdots,E_4)$ と $\mathcal{S}'=(H';E_1',\cdots,E_4')$ が similar であることを，ある可逆な作用素 $a:H\longrightarrow H'$ で，$a(E_i)=E_i'$ $(\forall i=1,\cdots,4)$ と決めておく。このとき，

$$T\cong S\ (\text{similar}) \Longleftrightarrow \mathcal{S}_T\cong\mathcal{S}_S\ (\text{similar})$$

である。このように，$T\longrightarrow\mathcal{S}=(H;E_1,\cdots,E_4)$ と順序付けられた4つ組と対応させるならば，作用素の一般化を，Hilbert空間の中の4個の subspaces が，になっているといえよう。Gelfand-Ponomarevは，実際に，4つ組の分類を行う上で，operators に対応していない既約な4つ組が出現して来ることを示している。

ここで報告することは，無限次元のヒルベルト空間においても，operatorに対応しない既約な4つ組が存在することを示すことにある．

2 記号の準備と今までの結果の総括

定義2.1　H を Hilbert 空間，$E_1, \cdots, E_n$ をその closed subspaces とする．このとき，順序付けられた組 $\mathcal{S} = (H; E_1, \cdots, E_n)$ を，n-subspace system という．

定義2.2　2つの n-subspace systems $\mathcal{S} = (H; E_1, \cdots, E_n)$ と $\mathcal{S}' = (H'; E_1', \cdots, E_n')$ が similar であることを，∃可逆 $a \in B(H, H')$ で，$a(E_i) = E_i'$ $(\forall i = 1, \cdots, n)$ ということとする．

定義2.3　n-subspace system $\mathcal{S}$ が，decomposable であるとは，ある non zero n-subspace systems $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ が存在して $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ (similar) となることをいう．

定義2.4　$\mathcal{S}$ が indecomposable であるとは，$\mathcal{S}$ が decomposable ではないときをいう．

さて，Gelfand-Ponomarev (1970)は，有限次元 Hilbert空間上のindecomposable n-subspace systems ($n \leq 4$)の完全分類を以下のように行なった。

(1) $n=1$のとき，$\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; (0), \mathbb{C}), (\mathbb{C}; \mathbb{C})$

(2) $n=2$のとき，$\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; E_1, E_2)$, $E_i \cong (0)$か$\mathbb{C}$ $(i=1,2)$.

(3) $n=3$のとき，$\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; E_1, E_2, E_3)$, $E_i \cong (0)$か$\mathbb{C}$ $(i=1,2,3)$.

$$\mathcal{S} \cong \left(\mathbb{C}^2; \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

(4) $n=4$のとき，defect $\rho(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{4} \dim E_i - 2\dim \mathcal{H}$ の値 $0, \pm 1, \pm 2$ により，E_iの添え字の順序を除いて，次のように分類される。

(4.1) 全体空間の次元が偶数であるとき，そのbaseを $e_1, \cdots, e_k, f_1, \cdots, f_k$ $(k=1,2,\cdots)$ とおく。

(4.1.a) $\rho(\mathcal{S})=0$のとき，

parameter $\lambda \neq 0,1$ をもつとき，

$E_1 = [e_1, \cdots, e_k]$, $E_2 = [f_1, \cdots, f_k]$, $E_3 = [e_1 + \lambda f_1, e_2 + f_1 + \lambda f_2, \cdots$

$\cdots, e_k+f_{k-1}+\lambda f_k]$, $E_4=[e_1+f_1, \cdots, e_k+f_k]$

parameter λ をもたないとき,

$E_1=[e_1, \cdots, e_k]$, $E_2=[f_1, \cdots, f_k]$, $E_3=[e_1, (e_2+f_1), \cdots, (e_k+f_{k-1})]$

$E_4=[e_1+f_1, \cdots, e_k+f_k]$.

(4.1.b) $\rho(\mathscr{S})=-1$ のとき,

$E_1=[e_1, \cdots, e_k]$, $E_2=[f_1, \cdots, f_k]$,

$E_3=[e_2+f_1, \cdots, e_k+f_{k-1}]$, $E_4=[e_1+f_1, \cdots, e_k+f_k]$.

(4.1.c) $\rho(\mathscr{S})=+1$ のとき,

$E_1=[e_1, \cdots, e_k]$, $E_2=[f_1, \cdots, f_k]$,

$E_3=[e_1, (e_2+f_1), \cdots, (e_k+f_{k-1}), f_k]$, $E_4=[e_1+f_1, \cdots, e_k+f_k]$.

(4.2) 全体空間の次元が奇数次元のとき,

その base を, $e_1, \cdots, e_{k+1}, f_1, \cdots, f_k$ $(k=0,1,2,\cdots)$ とおく.

(4.2.a) $\rho(\mathscr{S})=0$ のとき,

$E_1=[e_1, \cdots, e_{k+1}]$, $E_2=[f_1, \cdots, f_k]$,

$E_3=[e_1, (e_2+f_1), \cdots, (e_{k+1}+f_k)]$, $E_4=[e_1+f_1, \cdots, e_k+f_k]$.

(4.2.b) $\rho(\delta)=-1$ のとき,

$E_1=[e_1,\cdots,e_K,e_{K+1}]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_K]$,

$E_3=[e_2+f_1,\cdots,e_{K+1}+f_K]$, $E_4=[e_1+f_1,\cdots,e_K+f_K]$.

(4.2.c) $\rho(\delta)=+1$ のとき,

$E_1=[e_1,\cdots,e_K,e_{K+1}]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_K]$,

$E_3=[e_1,(e_2+f_1),\cdots,(e_{K+1}+f_K)]$, $E_4=[e_1+f_1,\cdots,e_K+f_K,e_{K+1}]$.

(4.2.d) $\rho(\delta)=-2$ のとき,

$E_1=[e_1,\cdots,e_K]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_K]$,

$E_3=[e_2+f_1,\cdots,e_{K+1}+f_K]$, $E_4=[e_1+f_2,\cdots,(e_{K-1}+f_K),(e_K+e_{K+1})]$.

(4.2.e) $\rho(\delta)=+2$ のとき,

$E_1=[e_1,\cdots,e_K,e_{K+1}]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_K,e_{K+1}]$,

$E_3=[e_1,(e_2+f_1),\cdots,(e_{K+1}+f_K)]$,

$E_4=[f_1,(e_1+f_2),\cdots,(e_{K-1}+f_K),(e_K+e_{K+1})]$.

このGelfand-Ponomarevの結果を,我々は一般次元の場合に拡張することを試みている.

今までに，以下のことを示して来ている．

(1) $n=1$ のとき，

無限次元は起きない．$\mathcal{S}\cong(\mathbb{C};(0)),(\mathbb{C};\mathbb{C})$ である．

(2) $n=2$ のとき，

無限次元は起きない．$\mathcal{S}\cong(\mathbb{C};E_1,E_2)$，$E_i\cong(0)$ か $\mathbb{C}$

$(i=1,2)$ である．

(3) $n=3$ のとき，

有限次元は，$\mathcal{S}\cong(\mathbb{C};E_1,E_2,E_3)$，$E_i\cong(0)$ か $\mathbb{C}$ $(i=1,2,3)$，

$\mathcal{S}\cong\left(\mathbb{C}^2;\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ であるが，

これ以外に，無限次元のものが存在するかどうかは

未解決である．この問題は，もし P. Rosenthal の transitive

lattice 問題が解ければ，肯定的に解決される．

(4) $n=4$ のとき，

このときには，Gelfand-Ponomarev の有限次元以外の例を

構成することができる．ただし，それは，以下に述べる

operator systemsの枠の中のものであった。

定義2.5

$\mathcal{S}=(H;E_1,\cdots,E_4)$ が bounded operator system であるとは，次のものと添え字の順序を除いて，similarなものをいう．

$\exists$ Hilbert空間 K_1, K_2 と，$\exists S\in B(K_1,K_2)$，$\exists T\in B(K_2,K_1)$ が存在して，$H=K_1\oplus K_2$，$E_1=K_1\oplus(0)$，$E_2=(0)\oplus K_2$，$E_3=\{(x\oplus Sx)\mid x\in K_1\}$，$E_4=\{(Ty\oplus y)\mid y\in K_2\}$ と書ける．

定義2.6

$\mathcal{S}=(H;E_1,\cdots,E_4)$ が weak operator system であるとは，次のものと添え字の順序を除いて，similarなものをいう．

$\exists$ Hilbert空間 K_1, K_2 と，$\exists$densely defined closed operators $S: D(S)(\subset K_1)\longrightarrow K_2$，$T: D(T)(\subset K_2)\longrightarrow K_1$ が存在して，

$H=K_1\oplus K_2$，$E_1=K_1\oplus(0)$，$E_2=(0)\oplus K_2$，

$E_3=\{(x\oplus Sx)\mid x\in D(T)\}$，$E_4=\{(Ty\oplus y)\mid y\in D(T)\}$ と

書ける。

次に、Gelfand-Ponomarev が、有限次元 Hilbert 空間 indecomposable 4-subspace systems の分類の指標として導入した defect $\rho(\mathcal{S})$ を、無限次元に拡げる。

<u>定義 2.7</u>

4-subspace system $\mathcal{S}=(H; E_1,\cdots,E_4)$ で、

$\dim(E_i\cap E_j)<\infty$, $\dim(E_i^\perp\cap E_j^\perp)<\infty$ $(\forall i,j=1,\cdots,4)$

となるものに対して、defect $\rho(\mathcal{S})$ を、

$$\rho(\mathcal{S})=\frac{1}{3}\Big(\sum_{i<j}\dim(E_i\cap E_j)-\dim(E_i^\perp\cap E_j^\perp)\Big)$$

と定義する。

このとき、次が成立する。

<u>定理 2.8</u>

有限次元 Hilbert 空間上の 4-subspace system $\mathcal{S}$ に対して、我々の defect $\rho(\mathcal{S})$ と、Gelfand-Ponomarev の defect $\rho(\mathcal{S})$ は、一致する。

さて，このように無限次元に拡張した defect $\rho(\mathcal{S})$ について，次が成立している．

定理 2.9

defects の取り得る値 $\mathbb{Z}/3$ が，indecomposable bounded operator systems の defects の値として実現できる．

3 Non-weak operator systems

この節では，2 で定義した operator systems の枠からはみ出る indecomposable 4-subspace systems が構成できることを示そう．これにより，標準的に operator に対応する 4-subspace systems とは異なるものが得られたことになる．勿論，困難な点は，得られた systems が，indecomposable であることを示す所にある．

例 3.1

$\alpha_i \geq M > 1$ $(i=1,2,\cdots)$，$K=\ell^2(\mathbb{N})$，$\{e_i\}_{i\geq 1}$ を K の通常の ONB とする．このとき，

$$S_\alpha e_i = \alpha_i e_{i+1} \text{ on } K=\ell^2(\mathbb{N}), \quad S e_i = e_{i+1} \text{ on } K=\ell^2(\mathbb{N})$$

とおく．さらに，

$$T=\begin{pmatrix} S_\alpha^* & 1 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，次の4-subspace system $\mathcal{S}$ を構成する．

$\widehat{K}=K\oplus K$, $H=\widehat{K}\oplus\widehat{K}$, $E_1=\widehat{K}\oplus(0)$, $E_2=(0)\oplus\widehat{K}$,

$E_3=\mathrm{graph}\,T+\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\e_1\end{pmatrix}$, $E_4=\left\{(x\oplus x)\,\middle|\,x\in\widehat{K}\right\}$.

このとき，$\mathcal{S}=(H;E_1,\cdots,E_4)$ は，indecomposable, non-weak operator systems である．その defect $\rho(\mathcal{S})$ の値は 1 である．これは，最初の non-weak operator systems で，indecomposable systems の例である．強調すべきことは，indecomposable を示すのが困難なことである．これは，Jordan form の Jumping 現象とも関連していると思われる．さて，次に，問題になることは，indecomposable non-weak operator systems で，defects の値は，すべて実現されるのかということである．これについては，以下の部分的解答を報告しておく．

$K=\ell^2(\mathbb{N})$ とおく. $\alpha_1(k), \alpha_2(k)$ を以下のようにおく.

$$\alpha_1(k)=\begin{cases} 2\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^{1/2} & (1\leqq k\leqq n_1), (n_2+1\leqq k\leqq n_3), \cdots \\ 2 & (n_1+1\leqq k\leqq n_2), (n_3+1\leqq k\leqq n_4), \cdots \end{cases}$$

$$\alpha_2(k)=\begin{cases} 2 & (1\leqq k\leqq n_1), (n_2+1\leqq k\leqq n_3), \cdots \\ 2\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^{1/2} & (n_1+1\leqq k\leqq n_2), (n_3+1\leqq k\leqq n_4), \cdots \end{cases}$$

上記の $\{n_i\}_{i\geqq 1}$ を, 次となるように決める.

$$\prod_{k=1}^{n_i}\frac{\alpha_1(k)}{\alpha_2(k)}=\begin{cases} > i & (i=\text{奇数}) \\ < \dfrac{1}{i} & (i=\text{偶数}) \end{cases}$$

これを利用して, ($i\geqq 3$として),

$$\alpha_i(k)=\begin{cases} 2\left(\dfrac{1+k}{k}\right)^{1/2+1/4+\cdots+1/2^{i-1}} & (1\leqq k\leqq n_1), (n_2+1\leqq k\leqq n_3), \cdots \\ 2\left(\dfrac{k}{1+k}\right)^{1/2+1/4+\cdots+1/2^{i-1}} & (n_1+1\leqq k\leqq n_2), (n_3+1\leqq k\leqq n_4), \cdots \end{cases}$$

とおく.

これを用いて,

$$W_i(k)=\alpha_{i+2}(k)\ (i\geqq 1)$$

とおく.

この$\{W_i(k)\}_{k\geqq 1}$を用いて, unilateral weighted shift

$S_{W_i}\ (i\geqq 1)$を考える. このとき,

$$T=\begin{pmatrix} S_{W_1}^{*} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & S_{W_n}^{*} & 1 \\ & & & S \end{pmatrix}$$

とおく. これを使って,

$$\hat{K}=\overbrace{K\oplus K\oplus\cdots\oplus K}^{(n+1)\text{個}},\quad H=\hat{K}\oplus\hat{K},\quad E_1=\hat{K}\oplus(0),$$

$$E_2=(0)\oplus\hat{K},\quad E_3=\operatorname{graph}T+\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ e_1\end{pmatrix},$$

$$E_4=\{x\oplus x\mid x\in\hat{K}\}.$$

このとき, $\mathcal{S}=(H;E_1,\cdots,E_4)$は, indecomposableであり,

non-weak operator systemsであり, defect $\rho(\mathcal{S})$は,

$\frac{2n+1}{2}$である.

参考文献

[EW] 榎本雅俊, 綿谷安男：ヒルベルト空間の中の4個の部分空間の配置問題, 京都大学数理解析研究所講究録（2002年2月）1250, 51–71

[W] Y. Watatani: Relative positions of four subspaces in a Hilbert space and subfactors, (to appear in a conference report).

[GP] I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev: Problems of linear algebra and classification of quadruples of subfactors in a finite dimensional vector space, Coll. Math. Soc. Ianos Bolyai 5, Hilbert space operators, Tihany (Hungary) 1970, 163–237 (in English).